12 漸化式と極限(1)

基本問題 & 解法のポイント

19

(1)

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n-\frac{1}{2} \Leftrightarrow a_{n+1}-2=\frac{3}{4}(a_n-2) \quad \therefore a_n-2=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}(a_1-2)$$

これと $a_1=1$ より, $a_n=2-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

(2)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{2-\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right\}$$

$$=2n-\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=2n-4\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[2-\frac{4}{n}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}\right]$$

$$=2-0\cdot(1-0)$$

$$=2$$

20

(1)

$a_{n+2}-\frac{4}{3}a_n+\frac{1}{3}a_n=0$ より, $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$

よって,

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_2-a_1)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{7}{3}-1\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

したがって,

$n\geq 2$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= 1 + 2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= 3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに，$\lim_{n \to \infty} a_n = 3$

補足

$3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{3}, 1$

これより，$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$，$a_{n+2} - \frac{1}{3}a_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$

A

73

(1)

(i) $n=1$のとき

$a_1=3>2$ より， $a_n>2$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき $a_n>2$ が成り立つと仮定する。

$$a_{k+1}=\frac{5a_k-4}{2a_k-1}$$
$$=\frac{2(2a_k-1)+a_k-2}{2a_k-1}$$
$$=2+\frac{a_k-2}{2a_k-1}$$

ここで， $a_k-2>2-2=0,\ 2a_k-1>2\cdot 2-1=3>0$ より， $\dfrac{a_k-2}{2a_k-1}>0$

よって， $a_{k+1}=2+\dfrac{a_k-2}{2a_k-1}>2$ となり， $n=k+1$のときも $a_n>2$ が成り立つ。

(i), (ii)より, すべての自然数 n に対し，$a_n>2$ であることを数学的帰納法により示された。

(2)

$$a_{n+1}-2=\frac{5a_n-4}{2a_n-1}-2=\frac{a_n-2}{2a_n-1}$$

より,

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{2a_n-1}{a_n-2}=\frac{3+2(a_n-2)}{a_n-2}=3\cdot\frac{1}{a_n-2}+2$$

$\therefore b_{n+1}=3b_n+2$

これより， $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

$$\therefore b_n+1=3^{n-1}(b_1+1)=3^{n-1}\left(\frac{1}{a_1-2}+1\right)=2\cdot 3^{n-1} \qquad \therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$$

(3)

$b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ より， $a_n=\dfrac{1}{b_n}+2=\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}-1}+2 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} a_n=2$

分数形の漸化式の一般解の求め方

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の一般項の求め方（入試問題では，誘導がついているのがふつうである）

方法 1

置き換えにより，分数漸化式の基本形 $\boldsymbol{b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}}$ を得てから解く。

求め方の手順

手順 1

$a_n=b_n+x$ とおいて，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形になるような x の値を求める。

$b_{n+1}+x=\dfrac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}$ より，$b_{n+1}=\dfrac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}-x$

$\therefore b_{n+1}=\dfrac{(p-rx)b_n-\{rx^2-(p-s)x-q\}}{rb_n+rx+s}$

ここで，$rx^2-(p-s)x-q=0$ の解を α とすると，$b_{n+1}=\dfrac{(p-r\alpha)b_n}{rb_n+r\alpha+s}$

尚，$rx^2-(p-s)x-q=0$ の解は，

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から求めることができる。

その理由については後述。

手順 2

$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形，つまり $b_{n+1}=\dfrac{(p-r\alpha)b_n}{rb_n+r\alpha+s}$ が得られた。

逆数をとると，$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{rb_n+r\alpha+s}{(p-r\alpha)b_n}$ より，

数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ の漸化式 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{r\alpha+s}{p-r\alpha}\cdot\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{r}{p-r\alpha}$ が得られる。

手順 3

$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{r\alpha+s}{p-r\alpha}\cdot\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{r}{p-r\alpha}$ を解くことで，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ の一般項を得，

その逆数をとることにより，数列 $\{b_n\}$ の一般項を得る。

手順 4

数列 $\{a_n\}$ は，$a_n=b_n+\alpha$ を計算することで得られる。

例 1：x の方程式が重解の場合

$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}$，$a_1=1$，$(n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を先ほどの手順に従って求めてみる。

$a_n=b_n+x$ とすると，$b_{n+1}+x=\dfrac{5(b_n+x)-16}{b_n+x-3}$ より，

$b_{n+1}=\dfrac{5(b_n+x)-16}{b_n+x-3}-x \quad \therefore b_{n+1}=\dfrac{(5-x)b_n-(x-4)^2}{b_n+x-3}$

ここで，$x=4$ とすると，$b_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_n+1} \quad \therefore \dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+1 \quad \therefore \dfrac{1}{b_{n+1}}-\dfrac{1}{b_n}=1$

これは，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ が公差 1，初項 $b_1=a_1-4=5-4=1$ $(\because a_1=b_1+4)$

よって，$\dfrac{1}{b_n}=n \quad \therefore b_n=\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,3,\cdots)$

$a_n=b_n+4$ より，$a_n=\dfrac{1}{n}+4\ (n=1,2,3,\cdots)$

$a_n=b_n+x$ とおいたとき，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形にできるような x が，

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいて得られる方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解である理由

$$\begin{aligned}
b_{n+1}&=\frac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}-x\\
&=\frac{pb_n+px+q}{rb_n+rx+s}-x\\
&=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}-x\\
&=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}-x\left(\dfrac{rb_n}{rx+s}+1\right)}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}\\
&=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}-\dfrac{rxb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}-x}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}
\end{aligned}$$

となるから，$\dfrac{px+q}{rx+s}-x=0$ となる x を求めればよいわけだが，

この方程式は，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおくことで得られる方程式

$x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ と同じである。

よって，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形が得られるような x を求めるには，

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいて得られる x の方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ を解けばよい。

補足

$x=\alpha$ のとき，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ になるとすると，

$b_n=a_n-\alpha$ より，$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{B(a_n-\alpha)+C}$ だから，

これから直接数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてもよい。

例 2：*x* の方程式が異なる 2 実数解の場合

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}$ $(n=1,2,\cdots)$ の一般項 a_n

解

$a_n=b_n+x$ とおき，特性方程式 $x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ の解を求めると，$x^2-6x+8=0$ $\quad\therefore x=2,4$

解法 1

$a_n=b_n+2$ とおくと，

$$b_{n+1}+2=\frac{-(b_n+2)+8}{-(b_n+2)+5}=\frac{-b_n+6}{-b_n+3}=\frac{2(-b_n+3)+b_n}{-b_n+3}=2+\frac{b_n}{-b_n+3}$$

$$\therefore b_{n+1}=\frac{b_n}{-b_n+3}$$

逆数をとると，$\dfrac{1}{b_{n+1}}=-1+\dfrac{3}{b_n}$ より，$\dfrac{1}{b_{n+1}}-\dfrac{1}{2}=3\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{2}\right)$

これより，

$$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{2}=3^{n-1}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=3^{n-1}\left(\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$\therefore \dfrac{1}{b_n}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$　すなわち　$b_n=\dfrac{2}{3^{n-1}+1}$

これと $a_n=b_n+2$ より，

$$a_n=\frac{2}{3^{n-1}+1}+2$$
$$=\frac{2+2\cdot 3^{n-1}+2}{3^{n-1}+1}$$
$$=\frac{2(3^{n-1}+2)}{3^{n-1}+1}$$

解法 2（処理は楽だが，特性方程式の解が重解の場合は使えない）

等比数列の形にしてから解く。

$a_n=b_n+2$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{b_n}{-b_n+3}$　$\therefore a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{-a_n+5}$　・・・①

$a_n=c_n+4$ とおくと，$c_{n+1}=\dfrac{3c_n}{-c_n+1}$　$\therefore a_{n+1}-4=\dfrac{3a_n-12}{-a_n+5}$　・・・②

$\dfrac{①}{②}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{a_n-2}{3a_n-12}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right)$

よって，数列$\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$は，初項$\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。

$\therefore \dfrac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

これより，$3^{n-1}a_n-2\cdot 3^{n-1}=-a_n+4$

ゆえに，$a_n=\dfrac{2(3^{n-1}+2)}{3^{n-1}+1}$

方法 2

分数形漸化式の基本形に変形できる形 $\boldsymbol{a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{ra_n+s}}$ にしてから解く。

手順

$$a_{n+1}-x=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-x$$

$$\downarrow$$

$$a_{n+1}-x=\frac{(p-rx)a_n+q-sx}{ra_n+s}$$

$$\downarrow$$

$$a_{n+1}-x=\frac{(p-rx)\left(a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)}{ra_n+s}$$

ここで，左辺 $a_{n+1}-x$ と右辺の $a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}$ に注目して，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ となる x を求める。

重要補足

$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

よって，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ と $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は同じ方程式である。

したがって，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から解を求めればよい。

$$\downarrow$$

特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ $\left(\text{または},-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)$ の解を α とすると，

$\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}=-\alpha$ より，$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}{ra_n+s}$ が得られる。

以後の処理も含めた分数漸化式の一般解の求め方は，以下の例を参照のこと

例 1：特性方程式の解が重解の場合

$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{5x-16}{x-3}$ を解くと，$x^2-8x+16=0\quad \therefore x=4$

$$\begin{aligned} a_{n+1}-4&=\frac{5a_n-16}{a_n-3}-4\\ &=\frac{a_n-4}{a_n-3}\\ &=\frac{a_n-4}{(a_n-4)+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-4}=\frac{1}{a_n-4}+1$$

よって，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n-4}\right\}$は，初項$\dfrac{1}{a_1-4}=1$，公差 1 の等差数列である。

すなわち$\dfrac{1}{a_n-4}=n$

ゆえに，$a_n=\dfrac{1}{n}+4$

例 2：特性方程式の解が異なる **2** 実数解の場合

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ を解くと，$x^2-6x+8=0\quad \therefore x=2,4$

解法 1

$x=2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_{n+1}-2&=\frac{-a_n+8}{-a_n+5}-2\\ &=\frac{a_n-2}{-a_n+5}\\ &=\frac{a_n-2}{-(a_n-2)+3} \end{aligned}$$

よって，　数列$\left\{\dfrac{1}{a_n-2}\right\}$の漸化式は，$\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=3\cdot\dfrac{1}{a_n-2}-1$となる。

これより，

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2}&=3\left(\frac{1}{a_{n-1}-2}-\frac{1}{2}\right)\\&=3^{n-1}\left(\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{2}\right)\\&=3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{1}{a_n-2}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$，すなわち$a_n=\dfrac{2}{3^{n-1}+1}+2$または$a_n=\dfrac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$

解法 2（特性方程式の解が重解の場合は無理）

$x=2$のとき，$a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{-a_n+5}$　・・・③

$x=4$のとき，$a_{n+1}-4=\dfrac{3(a_n-4)}{-a_n+5}$　・・・④

$\dfrac{③}{④}$より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{a_n-2}{3(a_n-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right)$

よって，数列$\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$は，初項$\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列である。

$$\therefore\frac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

これより，$3^{n-1}a_n-2\cdot3^{n-1}=-a_n+4$

ゆえに，$a_n=\dfrac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$

方法 3（特性方程式の解が重解の場合は使えない）

等比数列の漸化式：$\boldsymbol{\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}}$　に変形してから解く

この方法は，誘導形式の形で入試に出題されたことがある

求め方のしくみ

$a_n \xrightarrow{f} a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ から，

$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} \xrightarrow{h} \dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=h\left(\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ となるような α，β を求める。

↓

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ から，$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\cdot t^{n-1}$ が得られるので，

これから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

手順

$b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，関数 f,g,h の関係は以下のようになる。

$$
\begin{array}{ccc}
a_n & \xrightarrow{f} & a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s} \\
\downarrow g & & \downarrow g \\
b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} & \xrightarrow{h} & \begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}
\end{array}
$$

したがって，

α と β を求めるには，

合成関数の連立方程式 $\begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}$ を解けばよい。

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}&=h(b_n)\\
&=h(g(a_n))\\
&=t\cdot g(a_n)\\
&=t\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}
\end{aligned}
$$

$\therefore b_{n+1}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　・・・⑤

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= g(a_{n+1}) \\ &= g(f(a_n)) \\ &= \frac{f(a_n)-\alpha}{f(a_n)-\beta} \\ &= \frac{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta} \\ &= \frac{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)}{pa_n+q-\beta(ra_n+s)} \\ &= \frac{(p-r\alpha)a_n+q-s\alpha}{(p-r\beta)a_n+q-s\beta} \\ &= \frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}} \end{aligned}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}} \quad \cdots ⑥$$

⑤，⑥より，

$t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}$， $-\alpha=\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}$， $-\beta=\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}$

よって， α と β は方程式 $x=\dfrac{sx-q}{rx-p}$ を解くことにより求められ，

これを $t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}$ に代入することにより，公比 t が求められる。

重要補足

$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ より， $rx^2-(p-s)x-q=0$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ より， $rx^2-(p-s)x-q=0$

よって， $-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ と $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は同じ方程式である。

したがって， $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から

解を求めればよい。

まとめ

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ が異なる 2 実数解 α,β をもつとき，

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\quad\left(t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}\right)$ と表せる。

例：特性方程式の解が異なる **2** 実数解の場合

$a_1=3$， $a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ の解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると， $x^2-6x+8=0\quad\therefore x=2,4$

$\therefore\alpha=2$， $\beta=4$

ここで， $\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと， $t=\dfrac{-1-(-1)\cdot 2}{-1-(-1)\cdot 4}=\dfrac{1}{3}$ より， $\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n-4}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

$\therefore\dfrac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

これより， $3^{n-1}a_n-2\cdot 3^{n-1}=-a_n+4$

ゆえに， $a_n=\dfrac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$

74

k を $2+5k\neq 0$ を満たす実数とすると，

$$a_{n+1}+kb_{n+1}=(2+5k)a_n-\frac{1+3k}{2}b_n$$
$$=(2+5k)\left\{a_n-\frac{1+3k}{2(2+5k)}b_n\right\}$$

ここで，$k=-\dfrac{1+3k}{2(2+5k)}$ とすると，

$10k^2+7k+1=0$ すなわち $(5k+1)(2k+1)=0$ より，$k=-\dfrac{1}{5},\ -\dfrac{1}{2}$

$a_{n+1}+kb_{n+1}=(2+5k)\left\{a_n-\dfrac{1+3k}{2(2+5k)}b_n\right\}$ について，

$k=-\dfrac{1}{5}$ のとき

$a_{n+1}-\dfrac{1}{5}b_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{5}b_n$ より，

$a_n-\dfrac{1}{5}b_n=a_1-\dfrac{1}{5}b_1=5-\dfrac{8}{5}=\dfrac{17}{5}$　　・・・①

$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{1}{2}b_n\right)$ より，

$a_n-\dfrac{1}{2}b_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\dfrac{1}{2}b_1\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　・・・②

①，②より，

$$a_n=\frac{17}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=\frac{34}{3}-\frac{10}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$\alpha+\beta=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+b_n=\dfrac{17}{3}+\dfrac{34}{3}=17$

連立漸化式の解き方

はじめに

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ の形にする。

方法 1：連立漸化式をいじり，等比数列の形にする

手順 1

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$ ・・・①

$b_{n+1} = ra_n + sb_n$ ・・・②

①$-k\times$②より，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)a_n + (q-ks)b_n$

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)\left(a_n + \dfrac{q-ks}{p-kr}b_n\right)$ ・・・③

と変形する。

手順 2

③の右辺の $\dfrac{q-ks}{p-kr}$ が $\dfrac{q-ks}{p-kr} = -k$ となれば,

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p-kr)(a_n - kb_n)$ より，

$a_n - kb_n$ は，公比 $p-kr$，初項 $a_1 - kb_1$ の等比数列だから，

$a_n - kb_n = (p-kr)^{n-1}(a_1 - kb_1)$ ・・・④

となる。

したがって，$\dfrac{q-ks}{p-kr} = -k$，

すなわち k についての 2 次方程式

$rk^2 - (p-s)k - q = 0$ ・・・⑤

を解き，

k が異なる 2 実数解をもつならば，

④の式が 2 つできるので，その連立方程式を解けばよい。

k が重解をもつならば，

④，①，②から a_n または b_n の漸化式を得，解けばよい。

補足 1

$p=s, q=r$ の場合は，⑤より，$k=\pm1$ だから，これを覚えておいて，
いきなり①＋②と①－②から始めれば手際よく解ける。

補足 2

$a_{n+1}=pa_n+qb_n+t$ ・・・①'

$b_{n+1}=ra_n+sb_n+u$ ・・・②'

（t,u は実数）

の場合においても

①'$-k\times$②'より，$a_{n+1}-kb_{n+1}=(p-kr)\left(a_n+\dfrac{q-ks}{p-qr}b_n\right)+t-ku$ とした後，

$\dfrac{q-ks}{p-kr}=-k$，すなわち k についての 2 次方程式 $rk^2-(p-s)k-q=0$ を解き，

$a_{n+1}-kb_{n+1}=(p-kr)(a_n-kb_n)+t-ku$ の形の 2 項間漸化式

（$c_n=a_n-kb_n$ とおけば，$c_{n+1}=(p-kr)c_n+t-ku$）にしてから，

その漸化式を解けばよい。

よって，

方法 1 は万能型といえる。

方法 2：a_n と b_n について，それぞれの 3 項間漸化式をつくってから解く。

$a_{n+1}=pa_n+qb_n$ ・・・①

$b_{n+1}=ra_n+sb_n$ ・・・②

a_n についての漸化式

①より，$qb_n=a_{n+1}-pa_n$ $\therefore qb_{n+1}=a_{n+2}-pa_{n+1}$

②×q より，$qb_{n+1}=qra_n+sqb_n$

よって，$a_{n+2}-pa_{n+1}=qra_n+s(a_{n+1}-pa_n)$

$\therefore a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0$ ・・・⑥

b_n についての漸化式

②より，$ra_n=b_{n+1}-sb_n$ $\therefore ra_{n+1}=b_{n+2}-sb_{n+1}$

①×r より，$ra_{n+1}=pra_n+qrb_n$

よって，$b_{n+2}-sb_{n+1}=p(b_{n+1}-sb_n)+qrb_n$

$\therefore b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0$ ・・・⑦

漸化式⑥，⑦を解くことにより，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求める。

補足 3

$\begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n\end{cases}$ のとき，$\begin{cases}a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0\\ b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0\end{cases}$

75

(1)

(i) $n=1$ のとき

$a_1=a$， $0<a<1$ より， $0<a_n<1$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき $0<a_k<1$ が成り立つと仮定した場合

$0<1-a_k<1$ より， $0<\sqrt[3]{1-a_k}<1$

これと $a_{k+1}=1-\sqrt[3]{1-a_k}$ より， $0<a_{k+1}<1$

よって， $n=k+1$ のときも $0<a_n<1$ が成り立つ。

(i),(ii)より，すべての自然数 n について $0<a_n<1$ が成り立つ。

(2)

$a_{n+1}=1-\sqrt[3]{1-a_n}$ より， $1-a_n=(1-a_n)^{\frac{1}{3}}$

両辺の自然対数をとると， $\log(1-a_{n+1})=\dfrac{1}{3}\log(1-a_n)$

よって，

$$\log(1-a_n)=\frac{1}{3}\log(1-a_{n-1})$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\log(1-a)$$

ゆえに，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1-a)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\log(1-a)}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{3}{2}\log(1-a)$$

(3)

(2)より， $\log(1-a_n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\log(1-a)$

よって， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(1-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\log(1-a)=0$

ゆえに， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(1-a_n)=\log\left\{\lim_{n\to\infty}(1-a_n)\right\}=\log 1$

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

B

76

漸化式を両辺をy^{n+1}で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{y^{n+1}}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{a_n}{y^n}+1$

ここで，$\dfrac{a_{n+1}}{y^{n+1}}-\alpha=\dfrac{x}{y}\cdot\left(\dfrac{a_n}{y^n}-\alpha\right)$とすると，$\dfrac{a_{n+1}}{y^{n+1}}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{a_n}{y^n}-\dfrac{\alpha(x-y)}{y}$より，$-\dfrac{\alpha(x-y)}{y}=1$

よって，$\alpha=-\dfrac{y}{x-y}$

ゆえに，$\dfrac{a_{n+1}}{y^{n+1}}+\dfrac{y}{x-y}=\dfrac{x}{y}\cdot\left(\dfrac{a_n}{y^n}+\dfrac{y}{x-y}\right)$

これより，

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{y^n}+\frac{y}{x-y}&=\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\left(\frac{a_1}{y}+\frac{y}{x-y}\right)\\&=\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\frac{y}{x-y}\end{aligned}$$

よって，$a_n=\dfrac{y^{n+1}}{x-y}\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}-1\right\}$

x, yを$0<x<y$のときと$0<y<x$のときに分けて考える。

$0<x<y$のとき

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}-1\right\}=-1$より，$a_n=\dfrac{y^{n+1}}{x-y}\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}-1\right\}$が収束するための条件は

数列$\{y^{n+1}\}$が収束すること，すなわち$0<y\leq 1$を満たすことである。

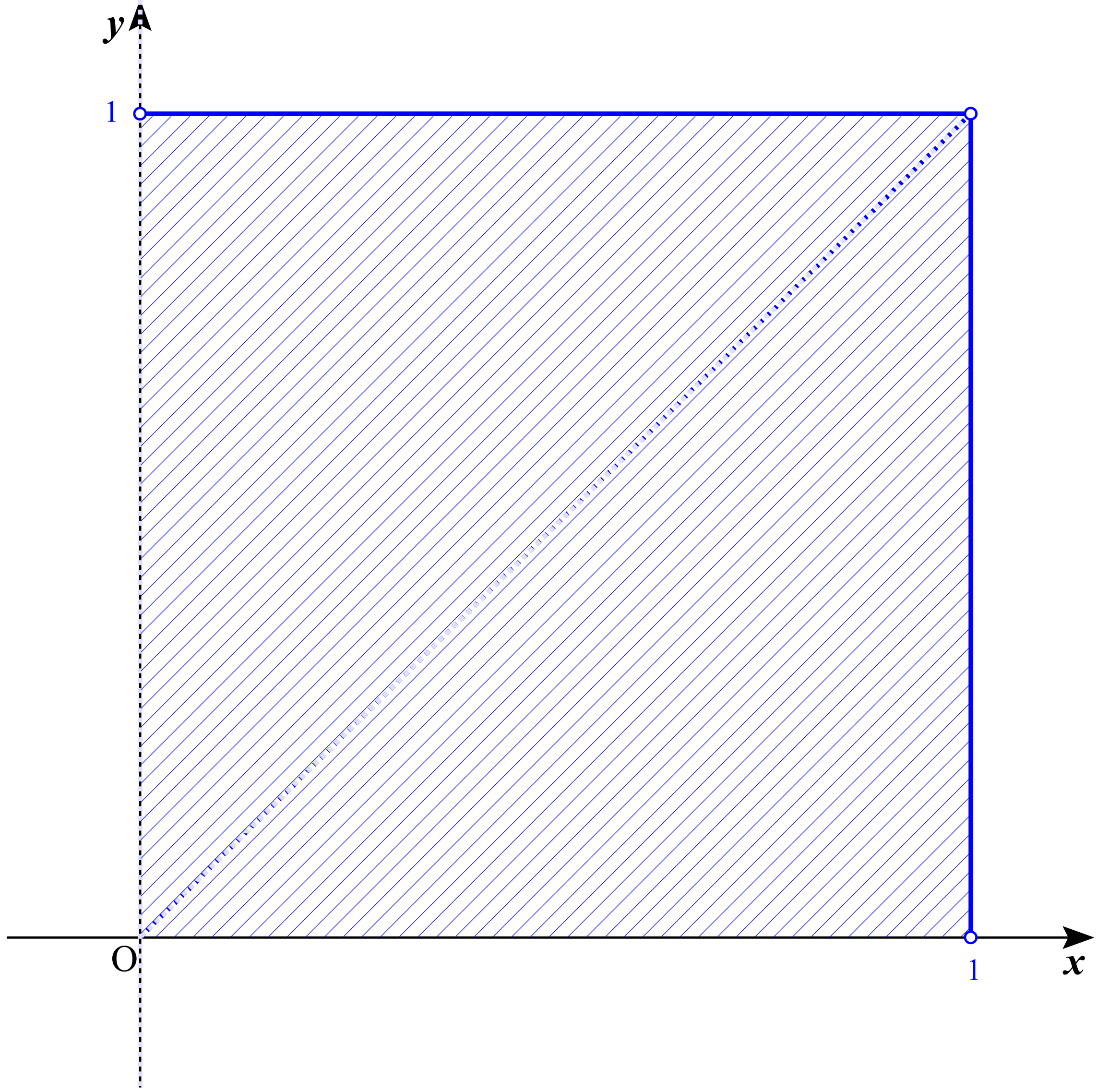
これと$0<x<y$より，$0<x<y\leq 1$　・・・①

$0<y<x$のとき

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{y^{n+1}}{x-y}\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}-1\right\}\\&=\frac{y^{n+1}x^{n-1}}{x-y}\left(\frac{1}{y^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-1}}\right)\\&=\frac{y^2x^{n-1}}{x-y}\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

これと$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}\right\}=1$より，$a_n=\dfrac{y^2x^{n-1}}{x-y}\left\{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{n-1}\right\}$が収束するための条件は

数列$\{x^{n-1}\}$が収束すること，すなわち$0<x\leqq 1$を満たすことである。
これと$0<y<x$より，$0<y<x\leqq 1$　・・・②
①または②より，$(x,\ y)$の範囲は下図斜線部
ただし，x軸，y軸，$y=x$上の点は除く。



$a_{n+1}=pa_n+q(n)$（p は 0 でない定数）の一般項を求める方法

はじめに

$f(n+1)=pf(n)+q(n)$ を満たす漸化式はいくらでもつくれる。

つまり，

$a_{n+1}=pa_n+q(n),\quad a_1=\alpha$

もあれば、

$b_{n+1}=pb_n+q(n),\quad b_1=\beta$

もあれば,

$c_{n+1}=pc_n+q(n),\quad c_1=\gamma$

もあれば,

⋮

といくらでもつくれる。

これらの漸化式 1 つ 1 つを $f(n+1)=pf(n)+q(n)$ の特性方程式という。

$a_{n+1}=pa_n+q(n),\quad a_1=\alpha$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を特性方程式を利用して求める方法

$a_{n+1}=pa_n+q(n)$　・・・①

$f(n+1)=pf(n)+q(n)$ を満たす特性方程式を $b_{n+1}=pb_n+q(n)$　・・・②とすると，

①－② より，

$a_{n+1}-b_{n+1}=p(a_n-b_n)$　・・・③

$\therefore \dfrac{a_{n+1}-b_{n+1}}{a_n-b_n}=p$

これは，数列 $\{a_n-b_n\}$ が公比 p，初項 a_1-b_1 の等比数列であることを示している。

よって，$a_n-b_n=p^{n-1}(a_1-b_1)$

ゆえに，$a_n=p^{n-1}(a_1-b_1)+b_n$

要するに，

与式の漸化式とその特性方程式の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-b_{n+1}=p(a_n-b_n)$ を得，

それから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるというのが，

特性方程式を利用して数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める方法の原理である。

特性方程式の作り方の原理

③より，$a_{n+1}=pa_n+b_{n+1}-pb_n$

これと $a_{n+1}=pa_n+q(n)$ より，

$q(n)=b_{n+1}-pb_n$

これより，b_n を $q(n)$ と同種の式にすれば楽に特性方程式ができることがわかる。

いろいろな特性方程式

$q(n)=c$ （c は定数）の場合

$b_n=\alpha$ （α は定数）とおく。

すると，漸化式は $\alpha=p\alpha+c$ となり，この方程式を解くことにより，α の値が求まる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+c$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ が得られる。

$q(n)=cn+d$ （n の 1 次式）の場合

$b_n=\alpha n+\beta$ とおくと，漸化式は $\alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+cn+d$ となり，

これが n の恒等式であることから，α と β を求めることができる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+cn+d$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ が得られる。

補足：階差数列を利用して解くことも可能

$a_{n+2}=pa_{n+1}+c(n+1)+d$ と $a_{n+1}=pa_n+cn+d$ の差をとると，

$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+c$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であり，

漸化式 $b_{n+1}=pb_n+c$ から数列 $\{b_n\}$ を求めることにより，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\ (n\geq 2)$

$q(n)=cn^2+dn+e$ （n の 2 次式）の場合

$b_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ とおくと，

漸化式は $\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(\alpha n^2+\beta n+\gamma)+cn^2+dn+e$ となり，

これが n の恒等式であることから，α,β,γ を求めることができる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+cn^2+dn+e$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma\}=p\{a_n-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\}$ が得られる。

$q(n)=ct^n\ (c\neq p, c\neq 0)$ の場合

$b_n=\alpha t^n$ とおくと，漸化式は $\alpha t^{n+1}=p\alpha t^n+ct^n\quad \therefore t^n\{\alpha(t-p)-c\}=0$

これが任意の n について成り立つから，$\alpha(t-p)-c=0\quad \therefore \alpha=\dfrac{c}{t-p}$

また，$a_{n+1}=pa_n+ct^n$ と $\alpha t^{n+1}=p\alpha t^n+ct^n$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\alpha t^{n+1}=p(a_n-\alpha t^n)$ が得られる。

補足：特性方程式を使わないで解く場合

$a_{n+1}=pa_n+ct^n$ の両辺を $\dfrac{1}{t^{n+1}}$ 倍すると，$\dfrac{a_{n+1}}{t^{n+1}}=p\dfrac{a_n}{t^n}+\dfrac{c}{t}$

$b_n=\dfrac{a_n}{t^n}$ とおくと，$b_{n+1}=pb_n+\dfrac{c}{t}$

これを解くことにより，数列 $\{a_n\}$ が求まる。

また，$q(n)=cp^n\ (c\neq 0)$ の場合，

数列$\{a_n\}$の漸化式は$a_{n+1}=pa_n+cp^n$であり，

この場合は，両辺を$\dfrac{1}{p^{n+1}}$倍することにより，$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{c}{p}$を得，

$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$とおいてからb_nを求め，$a_n=p^n b_n$とする。

例題

$a_1=5,\ \ a_{n+1}=3a_n-2^n\ (n=1,2,3,\cdots)$で定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

解法 1．特殊解を使って解く方法

漸化式$f(n+1)=3f(n)-2^n$の特殊解を$b_n=k\cdot 2^n$とおくと，

$k\cdot 2^{n+1}=3k\cdot 2^n-2^n \qquad \therefore 2^n(k-1)=0$

これは任意のnについて成り立つから，$k=1$

よって，$2^{n+1}=3\cdot 2^n-2^n$

これと$a_{n+1}=3a_n-2^n$の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-2^{n+1}=3a_n-3\cdot 2^n$より，$a_{n+1}-2^{n+1}=3(a_n-2^n)$

$$\begin{aligned}\therefore a_n-2^n&=3^{n-1}(a_1-2)\\&=3^n\end{aligned}$$

ゆえに，$a_n=3^n+2^n$

解法 2．特殊解を使わないで解く方法

漸化式の両辺を3^{n+1}で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$とおくと，$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \qquad \therefore b_{n+1}-b_n=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

したがって，数列$\left\{-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$は数列$\{b_n\}$の階差数列である。

$$\begin{aligned}\therefore b_n&=b_1-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\&=\frac{a_1}{3}-\frac{1}{3}\,\frac{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\\&=1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

ゆえに，$a_n=3^n+2^n$

77

(1)

$R_n=1-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$ より，$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{1-R_n}$

よって，

$$a_2=1+\frac{1}{1-R_1}$$
$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{a_1}}$$
$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=3$$

$$a_3=1+\frac{1}{1-R_2}$$
$$=1+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)}$$
$$=1+\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}$$
$$=7$$

(2)

$n\geq 2$ のとき，

$R_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ より，$R_n-R_{n-1}=\dfrac{1}{a_n}$　・・・①

また，$R_n=1-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$ より，

$$R_n-R_{n-1}=1-\frac{1}{a_{n+1}-1}-\left(1-\frac{1}{a_n-1}\right)$$
$$=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\quad・・・②$$

①，②より，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$

よって，$a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1$　$(n=2,\ 3,\ \cdots)$

(3)

(i) $n=2$ のとき

$a_2=3$，$n+1=3$ より，$a_n \geq n+1$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき $a_k \geq k+1$ が成り立つと仮定する。

$$a_{k+1}=a_k{}^2-a_k+1=\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

ここで，$a_k \geq k+1 \geq 3 > \dfrac{1}{2}$ より，

$$a_{k+1} \geq \left\{(k+1)-\frac{1}{2}\right\}^2+\frac{3}{4}=k^2+k+1$$

よって，

$$\begin{aligned} a_{k+1}-\{(k+1)+1\} &\geq k^2+k+1-\{(k+1)+1\} \\ &=k^2-1 \\ &>0 \ (\because k \geq 2) \end{aligned}$$

ゆえに，$a_{k+1} \geq (k+1)+1$

これは $n=k+1$ のときも $a_n \geq n+1$ が成り立つことを示している。

(i),(ii)より，$n \geq 2$ のとき不等式 $a_n \geq n+1$ が成り立つ。

(4)

$a_n \geq n+1$ より，$a_{n+1} \geq n+2 \quad \therefore a_{n+1}-1 \geq n+1$

これと $\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$ より，$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-1)=\infty$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=1$